## 基础课24 函数的性质与图象及其简单应用

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 函数的性质与图象及其简单应用 | 理解 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国甲卷（文） | ★★☆ | 数学运算  直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，函数的性质与图象及其简单应用是高考常考内容，一般以选择题或填空题的形式出现，试题难度中等.预计2025年高考会单独命题 | | | |

### 基础知识·诊断

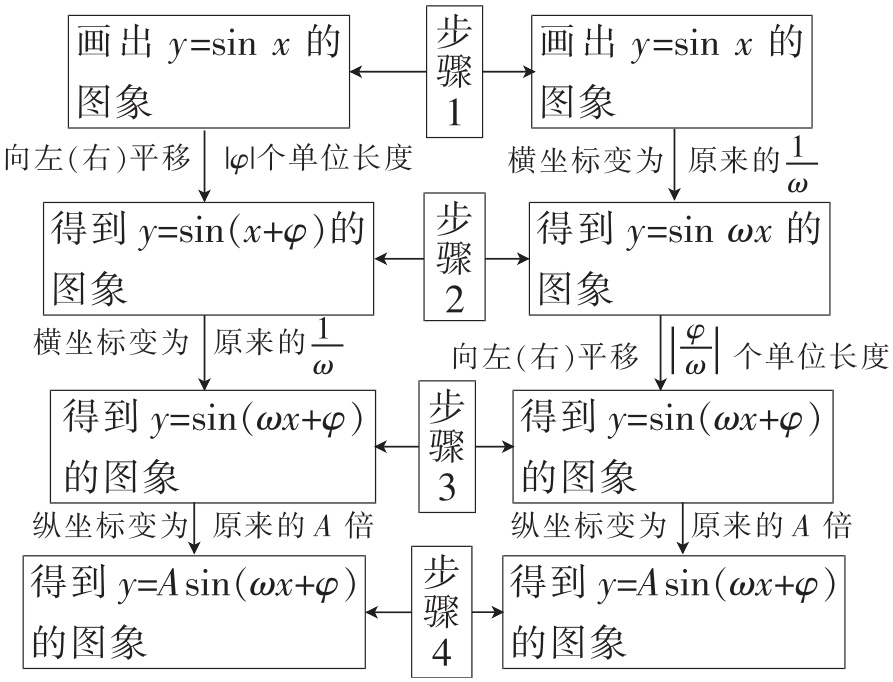
#### 夯实基础

##### 一、“五点法”作图

用“五点法”画，，一个周期内的简图时，要找五个关键点

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | ① |  | ② |  |
|  | 0 |  | 0 |  | 0 |

##### 二、函数的图象经变换得到的图象的两种途径



【提醒】1.两种变换的区别

（1）先相位变换再周期变换（伸缩变换），平移的量是个单位长度；

（2）先周期变换（伸缩变换）再相位变换，平移的量是个单位长度.

2.无论是哪种变换，每个变换总是针对自变量而言的，即图象变换要看“自变量”发生多大变化，而不是看角“ ”的变化.

##### 三、函数的有关概念

函数,表示一个振动量时，其振幅为，周期为,频率为,相位为④ ，初相为 .

###### 知识 拓展

1.函数图象平移的规律：“左加右减，上加下减”.

2.由到的变换：向左平移个单位长度而非 个单位长度.

3.函数的单调区间的“长度”为.

4.“五点法”作图中的五个点：（1）,两个最值点，三个零点；（2）,两个零点，三个最值点.

5.正弦曲线向左平移个单位长度即得余弦曲线.

6.一般情况下， 的值是唯一确定的，但 的值是不确定的，它有无数个，若求出的 值不在指定范围内，则可以通过加减的整数倍达到目的.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 将函数的图象向右平移个单位长度，得到函数的图象.( × )

（2） 要得到函数的图象，只需将函数图象上所有点的横坐标变为原来的 倍.( × )

（3） 将函数图象上各点的纵坐标变为原来的倍，便得到函数的图象.( √ )

（4） 函数图象的两条相邻对称轴之间的距离为一个周期.( × )

（5） 若函数的最小正周期为，则函数图象的两个相邻对称中心之间的距离为.( √ )

2. （易错题）图象上相邻的最高点和最低点之间的距离是.

**【易错点】**本题容易把最高点和最低点当成极值点理解.

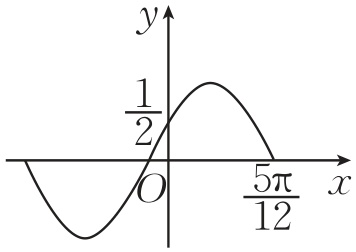
[解析]相邻最高点与最低点的纵坐标之差为2，横坐标之差恰为半个周期 ，故它们之间的距离为.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修改编）若将函数的图象向右平移个单位长度后得到函数的图象，则.

[解析]依题意，,所以.

4. （人教A版必修改编）已知函数在一个周期内的图象如图所示，则.



[解析]由已知可得，在附近单调递增，且 ，故.因为点,是函数的图象在轴右侧的第一个对称中心，所以 ，可得，故.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅰ卷]已知函数在上有且仅有3个零点，则 的取值范围是.

[解析]因为 ，所以 ，令，则有3个不同的根，令，则有3个根，其中，结合余弦函数的图象性质可得 ，故.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 函数的性质与图象及变换［自主练透］

1. [2022·浙江卷]为了得到函数的图象，只要把函数的图象( D ).

A. 向左平移个单位长度 B. 向右平移个单位长度

C. 向左平移个单位长度 D. 向右平移个单位长度

[解析]因为，所以把函数图象上的所有点向右平移个单位长度可得到函数的图象.故选.

2. [2024·梅州模拟]为了得到函数的图象，只需将函数的图象( A ).

A. 向左平移个单位长度 B. 向左平移个单位长度

C. 向右平移个单位长度 D. 向右平移个单位长度

[解析]由题意，函数，

观察发现可由函数的图象向左平移个单位长度得到函数的图象.故选.

3. [2024·舒城模拟]将函数的图象向左平移个单位长度，得到函数的图象，若在,上为增函数，则 的最大值为( A ).

A. 2 B. 3 C. 4 D.

[解析]依题意，，由，，得，即的一个单调递增区间是,，因为在,上为增函数，所以,,，故，即 的最大值为2.故选.

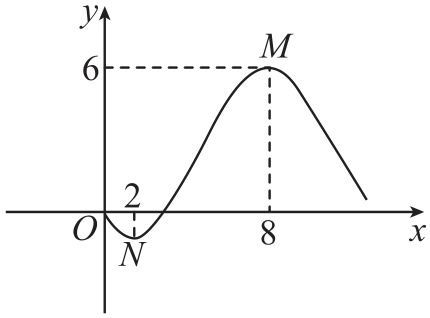


**作函数图象的方法**

|  |  |
| --- | --- |
| “五点法”作图 | 用“五点法”作的简图，主要是通过变量代换，设，由取0,,,,来求出相应的，通过列表，计算得出五点坐标，描点后得出图象 |
| 图象的变换法 | 由函数的图象通过变换得到的图象有两种途径：“先平移后伸缩”与“先伸缩后平移” |

#### 考点二 由图象确定函数的解析式［师生共研］

典例1 （多选题）（原创）已知函数，其部分图象如图所示,，分别为最高点、最低点，则下列结论正确的是( BD ).



A. 函数图象的对称中心为点,

B. 函数的单调递减区间为,

C. 将函数的图象向左平移4个单位长度得到一个偶函数

D. 不等式的解集为,

[解析]根据题意，

,，又,，,，

.令 ,,解得,， 函数图象的对称中心为,，故错误；

根据图象易知函数的单调递减区间为,，故正确；

由图可知，直线为图象的一条对称轴，又经过原点，故将函数的图象向左平移2个单位长度后，图象关于轴对称，故错误；

,,,，故,，故正确.

故选.



**根据图象求函数的解析式的方法和步骤**

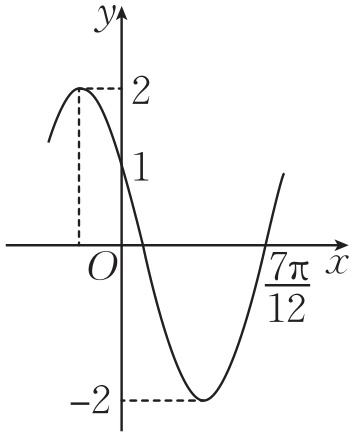
1.求，，确定函数的最大值和最小值，则，.

2.求 ，确定函数的周期，则.

3.求 ，常用方法：①五点法，求出图象中离原点最近的右侧上升（或下降）部分的与轴交点的横坐标，令（或）,求 ；②代入法，将已知点的坐标代入解析式，再结合图象和 的范围解出 .

##### 针对训练

已知函数的部分图象如图所示，则( A ).



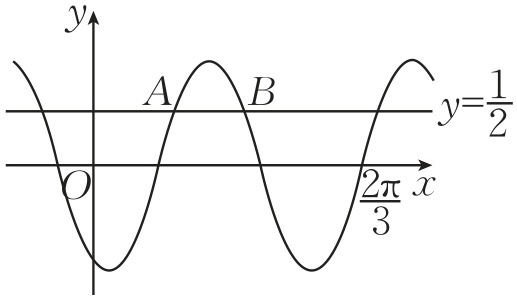
A. ， B. ， C. ， D. ，

[解析]由函数图象与轴的交点纵坐标为1，等于振幅2的一半，且此交点处于函数的单调递减区间上，同时在同一周期内的后续单调区间上的零点的横坐标为,并结合， ，可知解得故选.

#### 考点三 三角函数图象与性质的综合应用［多维探究］

##### 三角函数图象与性质的综合角度1

典例2 [2023·新高考Ⅱ卷]已知函数，如图,，是直线与曲线的两个交点，若，则.



[解析]设,,,，由,可得，

由可知， 或 ，，由图可知，

，即，所以.

因为，所以 ，即 ，.

所以，

所以或，

又因为，所以，所以.



**三角函数的图象和性质的综合应用问题的解题策略**

先将化为的形式，再借助的图象和性质（如定义域、值域、最值、周期性、对称性、单调性等）求解.

##### 三角函数的零点（方程根）问题角度2

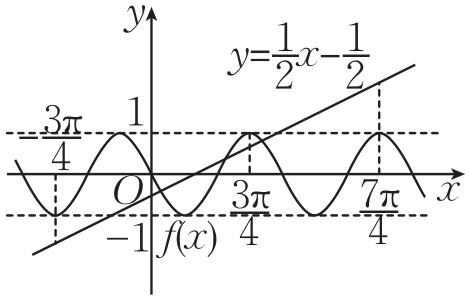
典例3 [2023·全国甲卷]若函数的图象由函数的图象向左平移个单位长度得到，则的图象与直线的交点个数为( C ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

[解析]因为的图象向左平移个单位长度所得的图象对应的函数解析式为，所以，

而显然过,与两点，

作出与的部分图象，如图所示，



考虑在,,，即,,处与的大小关系，

当时，，；

当时，，；

当时，，.

由图可知，的图象与直线的交点个数为3.故选.

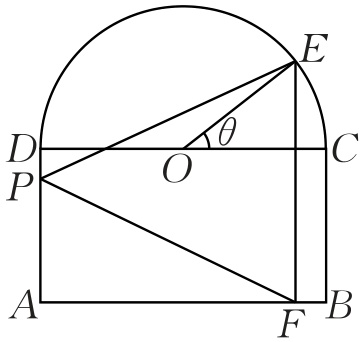


**三角函数的零点（方程根）问题的解题策略**

对于不方便直接求出方程根的判断方程根的个数问题，可以用数形结合法求解，具体步骤是把方程根的个数问题转化为两个容易作的函数图象的交点问题，在同一平面直角坐标系中画出两个函数的图象，判断交点个数即可.

##### 三角函数的实际应用角度3

典例4 （双空题）如图,这是矩形与半圆的组合图形，其中，为半圆弧上一点，，垂足为，点在线段上，且，设，则的面积与 的关系式为,的最大值为.



[解析]设与交于点，如图，

根据题意可得 ，

，

因为，，所以，

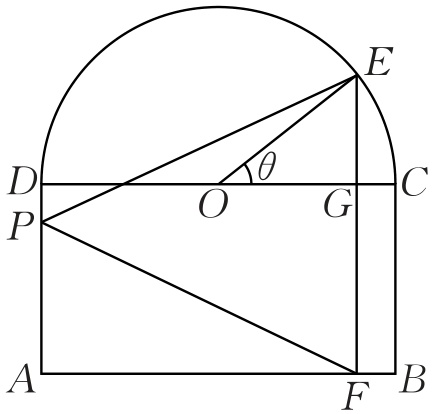
所以的面积，其中 ，

因为 ，所以，

所以，

所以当且仅当时，取最大值，最大值为1，

所以的最大值为.





**三角函数模型的应用**

1.已知函数模型求解数学问题.

2.把实际问题抽象转化为数学问题，利用三角函数的有关知识解决问题.

##### 多维训练

1. [2024·沧州模拟]（多选题）已知函数为常数，的图象关于直线对称，函数，则下列说法正确的是( ABC ).

A. 将的图象向左平移个单位长度可以得到的图象

B. 的图象关于点,对称

C. 在,上单调递减

D. 的最大值为1

[解析]由题意，，

，，

将的图象向左平移个单位长度，所得图象的解析式为，正确；

，正确；

当,时，,,，此时是减函数，正确；

的最大值为，错误.故选.

2. （原创）将最小正周期为 的函数的图象向右平移个单位长度，再向下平移个单位长度，得到函数的图象，若函数的零点为，，则.

[解析]由题意可知，，所以，其图象平移后得到的图象.

，,，

又 方程的解为，，

，，

，

,，

，,，

由，

得，.

又，

.

3. [2024·福州模拟]某城市一年中12个月的平均气温与月份的关系可近似地用三角函数来表示.已知6月份的月平均气温为，12月份的月平均气温为，则10月份的月平均气温为20.5 .

[解析]由题意得，，解得，，所以,

令得.